Co občas chybí v učebnicích

Projekce

Nechť $\mathbb{E}_n$ je n-rozměrný euklidovský prostor, $U \subseteq \mathbb{E}_n$ jeho podprostor. Víme, že pak existuje právě jedno lineární zobrazení $p_U : \mathbb{E}_n \to \mathbb{E}_n$ takové, že $p_U|U = \mathrm{id}_U$ a $\ker p_U = U^\perp$. Toto zobrazení nazýváme *ortogonální projekce*. Z definice p_U okamžitě plyne, že $\operatorname{Im} p_U = U$. Protože $\mathbb{E}_n = U \oplus U^\perp$, lze každý vektor $v \in \mathbb{E}_n$ jednoznačně psát jako součet vektorů $v_1 \in \operatorname{Im} p_U$ a $v_2 \in \ker p_U$.

Povšimněte si, že zobrazení p_U je *idempotentní*, tj. splňuje rovnost

$$p_U \circ p_U = p_U.$$

Skutečně, na U splývá p_U s identitou, která je idempotentní, na $U^\perp$ splývá s nulovým zobrazením, které je také idempotentní.

Využijme tuto vlastnost k zobecnění ortogonální projekce na libovolné vektorové prostory.

Definice. Nechť V je vektorový prostor nad polem $\mathbb{K}$. Řekneme, že lineární zobrazení $P : V \to V$ je *projekce*, pokud $P \circ P = P$.

Příklad. Ortogonální projekce této definici zřejmě vyhovuje. Pro libovolné V je identita na V projekce, nulové zobrazení je projekce.

Tvrzení. *Nechť V je vektorový prostor nad polem $\mathbb{K}$ a $P : V \to V$ projekce. Pak $V = \operatorname{Im} P \oplus \ker P$.*

Důkaz. Buď $v \in V$ libovolný vektor. Pak $v = Pv + (v - Pv)$, přičemž zřejmě $Pv \in \operatorname{Im} P$ a $P(v - Pv) = Pv - PPv = Pv - Pv = 0$, tedy $v - Pv \in \ker P$. Nechť $v \in \operatorname{Im} P \cap \ker P$, označme $u \in P^{-1}(v)$ libovolný vzor v. Pak $PPu = Pv = 0$, neboť $v \in \ker P$, ale z definice projekce platí $PPu = Pu = v$, tedy $v = 0$ a $\operatorname{Im} P \cap \ker P = \{0\}$. □

Všimněte si, že v důkazu Tvrzení jsme ukázali, že $P|\operatorname{Im} P = \mathrm{id}_{\operatorname{Im} P}$. Skutečně, každé $v \in \operatorname{Im} P$ je tvaru $v = Pu$ pro vhodné $u \in V$ a z definice projekce plyne

$$Pv = PPu = Pu = v.$$

Tedy projekce má stejnou vlasnost jako ortogonální projekce — její zúžení na obraz splývá s identitou. Zvolme nyní libovolnou bázi $\alpha = (v_1, \dots, v_n)$ prostoru V tak, že $(v_1, \dots, v_k)$ je báze $\operatorname{Im} P$ a $(v_{k+1}, \dots, v_n)$ báze $\ker P$. Pak platí

$$(P)_{\alpha\alpha} = \begin{pmatrix} E & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix},$$

kde E je jednotková matice $k \times k$.

Dokázali jsme tak, že Jordanův tvar každé projekce se skládá z bloků 1×1 a vlastní čísla jsou 1 nebo 0. Vlastní čísla lze ale spočítat algebraicky přímo z definice: nechť $\lambda \in \mathbb{K}$ je vlastní číslo $P : V \to V$ příslušné vlastnímu vektoru $v \in V$, pak

$$\lambda v = Pv = P(Pv) = P\lambda v = \lambda Pv = \lambda^2 v,$$

z čehož plyne $\lambda^2 = \lambda$ a jedinými idempotentními prvky v poli $\mathbb{K}$ jsou právě 0 a 1.