Lineární zobrazení na vektorovém prostoru se skalárním součinem

Definice. Mějme prostor všech lineární zobrazení na vektorového prostoru nad $\mathbb{C}$ konečné dimenze se skalárním součinem $(\mathbb{V}, (\,,\,))$ na sebe. Takový prostor se označuje $Hom(\mathbb{V}, \mathbb{V})$. Jedná se opět o vektorový prostor (rozmyslete si). Můžeme teď definovat normu $T \in Hom(\mathbb{V}, \mathbb{V})$ nasledovně:

$$\|T\| = sup\{\|Tx\| : x \in \mathbb{V}, \|x\| \leq 1\}$$

(Rozmyslete si, že takto definované zobrazení $Hom(\mathbb{V}, \mathbb{V}) \longrightarrow \mathbb{R}$ splňuje axiomy normy a že navíc pro každý $T \in Hom(\mathbb{V}, \mathbb{V})$ platí $\|T\| < \infty$)

Poznámka. Pro libovolnou množinu M a vektorový prostor platí, že $Hom(M, \mathbb{V})$ je vektorový prostor.

Poznámka. Jedná se o obecnější princip, rozšíříme-li naši definici i na některé vektorové prostory nekonečné dimense (Hilberovy prostory $\mathbb{H}$) , mluvíme pak o tzv. ohraničených operátorech. To jsou prvky $T \in Hom(\mathbb{H}, \mathbb{H})$ pro které platí $\|T\| < \infty$. Všechny naše další úvahy a věty platí právě pro totu třídu operátorů.

Věta. Nechť pro $T \in Hom(\mathbb{V}, \mathbb{V})$ platí, že $(Tx, x) = 0$ pro každé $x \in \mathbb{V}$. Pak T je triviální zobrazení.

Důkaz. Platí tedy $(T(x + y), (x + y)) = 0$, $(T(x + \imath y), (x + \imath y)) = 0$. Z bilinearity skalárního součinu máme $(Tx, y)+(Ty, x) = 0$ a $-\imath(Tx, y)+\imath(Ty, x) = 0$. Vynásobením druhé rovnice $\imath$ a sečtením dostaneme $(Tx, y) = 0$ pro každé $x, y \in \mathbb{V}$. Dosádíme $y = Tx$ a máme celkem $(Tx, Tx) = 0$ tedy $\|Tx\| = 0$ a to může splňovat jen nulový vektor. Tedy $Tx = 0$. □

Poznámka. Uvědomte si, že věta neplatí, uvažujeme-li vektorový prostor nad polem $\mathbb{R}$.

Definice. Pro operátor $T \in Hom(\mathbb{V}, \mathbb{V})$ definujeme adjungovaný lineární operátor $T^* \in Hom(\mathbb{V}, \mathbb{V})$ jako jediný lineární operátor splňující $(Tx, y) = (x, T^*y)$ pro všechna $x, y \in \mathbb{V}$ a pro který platí $\|T\| = \|T^*\|$.

Poznámka. Je-li $\mathbb{V}$ konečné dimenze, můžeme ve vhodně zvolené bázi skalární součin vyjádřit $x^\perp Qy$, potom rovnice $(Tx)^\perp Qy = x^\perp QT^*y$ jde přepsat na $T^\perp Q = QT^*$ a celkem máme, že $T^* = Q^{-1}T^\perp Q$. T^* tedy vždy existuje a je dán jednoznačně.

Poznámka. To, že operátor existuje a je určen jednoznačne i pro vektorové prostory spočetné dimense lze nalézt např. v [] na str.

Věta. Zobazení $* : Hom(\mathbb{V}, \mathbb{V}) \longrightarrow Hom(\mathbb{V}, \mathbb{V})$ je involutivní homomorfismus vektorových prostorů $(\mathbb{V}, +, \mathbb{C})$ i okruhů $(\mathbb{V}, \circ, +)$ (kde násobení je skládání funkcí a sčítání je sčítání na obraze). Tj. $* \in Hom(Hom(\mathbb{V}, \mathbb{V}), Hom(\mathbb{V}, \mathbb{V}))$, které splňuje $*^2 = id$

Důkaz. Bilinearita skalárního součinu zaručuje zachovávání sčítání. Násobení skalárem, skládáni:

$$(\lambda Tx, y) = \lambda(Tx, y) = \lambda(x, T^*y) = (x, \overline{\lambda}T^*y)$$

$$(STx, y) = (Tx, S^*y) = (x, T^*S^*y)$$

A konečně involuce:

$$(Tx, y) = (x, T^*y) = \overline{(T^*y, x)} = \overline{(x, T^{**}y)} = (T^{**}x, y)$$

□

Poznámka. Přísně vzato se o homomorfismus nejedná. Všimeme si, že $\mathbb{C}$ operuje na T^* svou konjungcí a operátory se skládají v opačném pořadí. Tomu se říká antihomomorfismus. (Jak to spravit?)

Věta. Pro $T \in Hom(\mathbb{V}, \mathbb{V})$ platí, že $kerT^* = (ImT)^{\perp}$ a $kerT = (ImT^*)^{\perp}$

Důkaz. $y \in kerT^* \Leftrightarrow T^*y = 0 \Leftrightarrow (x, T^*y) = 0 (\forall x \in \mathbb{V}) \Leftrightarrow (Tx, y) = 0 (\forall x \in \mathbb{V}) \Leftrightarrow y \in (ImT)^{\perp}$ Druhá část platí dosadíme-li za operátor T jeho adjungci T^* .

□

Definice. $T \in Hom(\mathbb{V}, \mathbb{V})$ nazýváme :

(1) Normální, platí-li $TT^* = T^*T$
(2) Samoadjungovaný, platí-li $T^* = T$
(3) Unitární, platí-li $T^*T = id = TT^*$
(4) Projekce, platí-li $T^2 = T$

Příklad. (1) Operátor id splňuje všechny podmínky .
(2) Každý samoadjungovaný i každý unitární je normální.

Věta. Pro $T \in Hom(\mathbb{V}, \mathbb{V})$ platí:

(1) T normální $\Longleftrightarrow \|T^*x\| = \|Tx\| (\forall x \in \mathbb{V})$
(2) T normální $\Longrightarrow kerT = kerT^*$
(3) Pokud T je normální a $x \in \mathbb{V}$ je vlastní vektor T příslušný vlastnímu číslu $\lambda \in \mathbb{C}$,pak x je vlastním vektor operátoru T^* příslušný vlastnímu číslu $\overline{\lambda}$.
(4) T normální, λ, μ jsou dvě různá vlastní čísla, pak jsou příslušné vlastní vektory ortogonální.

Důkaz. (1) $\|Tx\|^2 = (Tx, Tx) = (T^*Tx, x)$
$\|T^*\|^2 = (T^*, T^*x) = (TT^*x, x)$.
(2) Plyne z (1).
(3) $(T - \lambda I)$ je normální a můžeme aplikovat (2), x je tedy vlastním vektorem operátoru T^*. Z definice T^* vypočteme příslušnou vlastní hodnotu.
(4) $\lambda(x, y) = (\lambda x, y) = (Tx, y) = (x, T^*y) = (x, \overline{\mu}y) = \mu(x, y)$ pokud $\lambda \neq \mu$ musi nutně být $x \perp y$

□

Poznámka. Podmínka (1), která je ekvivalentní s tím, že operátor je normální říka, že norma obrazu každého vektoru je stejná u T i T^* . Odtud název normální.

Věta. Pro $U \in Hom(\mathbb{V}, \mathbb{V})$ jsou následující podmínky ekvivalentní:

(1) U je unitární.

(2) $ImU = \mathbb{V}$ a $(Ux, Uy) = (x, y)(\forall x, y \in \mathbb{V})$
(3) $ImU = \mathbb{V}$ a $\|Ux\| = \|x\|(\forall x \in \mathbb{V})$

Důkaz. U je unitární $\Longrightarrow Im(U) = \mathbb{V}$, $U^*U = I \Longrightarrow (Ux, Uy) = (x, U^*Uy) = (x, y) \Longrightarrow (c)$. A nakonec $(U^*Ux, x) = (Ux, Uy) = \|Ux\|^2 = \|x\|^2 = (x, x)(\forall x \in \mathbb{V})$ a tedy $U^*U = I$.

□

Poznámka. Unitární operátory musí být invertibilní prvky v $Hom(\mathbb{V}, \mathbb{V})$.

Věta. Nechť $P \in Hom(\mathbb{V}, \mathbb{V})$ je projekce, pak následující jsou ekvivalentní:

(1) P je samoadjungovaný
(2) P je normální
(3) $ImP = (kerP)^{\perp}$
(4) $(Px, x) = \|Px\|^2(\forall x \in \mathbb{V})$ tj. ortogonální projekce

Důkaz. (1) (1) $\Longrightarrow$ (2) zřejmé
(2) (2) $\Longrightarrow ker(P) = (Im(P))^{\perp}$ a aplikujeme $\perp \Longrightarrow (3)$
(3) (3) $\Longrightarrow (x \in \mathbb{V})x = y + z, y \perp z, Py = 0, Pz = z \Longrightarrow Px = z$
$(Px, x) = (z, z) = (Px, Px) = \|Px\|^2$
(4) $\|Px\|^2 = (Px, x) = (x, P^*x) = \overline{(P^*x, x)} =$ (protože $\|Px\|^2 \in \mathbb{R}) = (P^*x, x)$ celkem $P = P^*$

□

Věta. Pokud $S \in Hom(\mathbb{V}, \mathbb{V})$ je samoadjungovaný operátor pak $ST = 0 \Longleftrightarrow ImS \perp ImT$

Důkaz. $(Sx, Ty) = (x, STy)$ □

TeXt určený pro Laplus-2004, Jaroslav Hrdina, 8.3.2004.